

3D フラクタル集合の体積走査による実空間表示

山本 欧^{*1}

Volumetric Scanning Visualization of a 3D Fractal set

Ou Yamamoto^{*1},

Abstract – A volumetric display is a display device that draws 3D images directly in real 3D space. We developed a volumetric display that can be easily constructed from commercial component parts. Our display creates cross-sectional images of 3D objects in sequence on a vacuum fluorescent display (VFD) moving in a reciprocating motion, and 3D images of the objects appear due to the afterimage effect. In this paper, we propose visualization of Quaternion Julia fractals as an application of our display. Quaternion Julia fractals is a mathematically interesting subject. However, their shapes and process of their parameterized deformation are difficult to understand using only 2D images. Our application enables users to view a volumetric 3D animation of their deformation.

Keywords : Quaternion Julia set, 3D fractal, Volumetric display, 3D visualization

1. はじめに

四元数 Julia 集合^[1]は、四元数

$$\mathbf{q} = w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1)$$

に関し、四元数の定数 c を含む漸化式

$$\mathbf{q}_{n+1} = f(\mathbf{q}_n, c) \quad (2)$$

が非発散となるような初期値 \mathbf{q}_0 の集合である充填 Julia 集合の境界として定義される。ここに w, x, y, z は実数、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は虚数であり、

$$\begin{cases} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \\ \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = \mathbf{j} \\ \mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \mathbf{ik} = -\mathbf{j} \end{cases} \quad (3)$$

の性質がある。 $f(\mathbf{q}_n, c) = \mathbf{q}_n^2 + c$ や $f(\mathbf{q}_n, c) = \mathbf{q}_n^3 + c$ であるとき、四元数 Julia 集合はフラクタル構造を持つことで知られ、 w, x, y, z のいずれかを固定値とすれば、複雑な 3 次元フラクタル構造を持つ立体図形を形成する。さらに、固定値をパラメータとして変化させたり、複素平面上の回転を行うことで、複雑な変形が生じる。このため四元数 Julia 集合は CG 分野においてしばしば可視化の対象とされており、そのための機能を持つアプリケーション・ソフトウェアも存在する。汎用の 3DCG レンダリングソフトウェア Pov-Ray^[2] もその 1 つであり、Pov-Ray によって表示した四元数 Julia 集合の例（漸化式 $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n^2 + c$, $c = -0.83 - 0.83\mathbf{j} - 0.025\mathbf{k}$ ）を図 1 に示す。

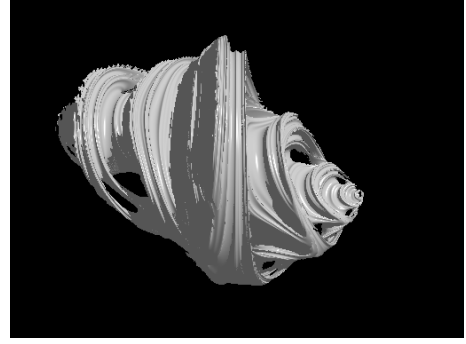


図 1 四元数 Julia 集合の例
Fig.1 Quaternion Julia Fractal Example

しかし従来の可視化手法では、四元数 Julia 集合は不透明物体としてレンダリングされる場合がほとんどであり、その場合、集合の内部構造までを透過的に観察することはできない。また上述のパラメタ変形についても、2D 画面上の表示からは 3 次元的な形状変化が把握しにくい。これらの問題が発生しない表示方法の 1 つとして、実空間に直接立体を描くボリウムディスプレイ^[3]による表示があげられる。ボリウムディスプレイは、立体視の生理的要因を満たす自然な立体表示を特徴とする。筆者らは、市販部品から構成できる体積走査方式のボリウムディスプレイを提案・実装しており^{[4]-[6]}、本研究では、四元数 Julia 集合の本ディスプレイ上での可視化を試み、四元数 Julia 集合の表示における本ディスプレイの有効性を検討した。

2. ボリウムディスプレイの概要

2.1 体積走査機構

図 2 に、本研究で用いたボリウムディスプレイの構成と表示例を示す。本ディスプレイは蛍光表示パネ

^{*1}: 東京電機大学 工学部 電子システム工学科
^{*1}: Tokyo Denki University

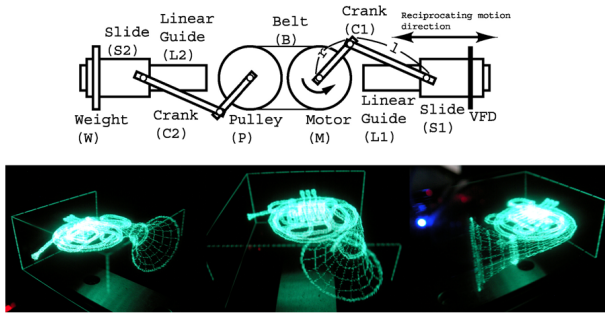
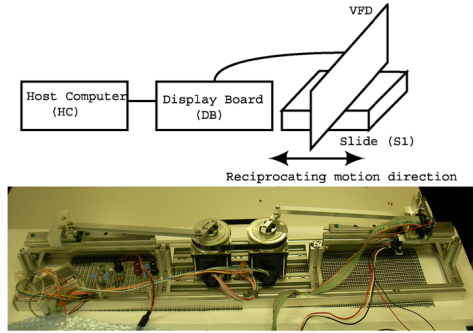


図2 (上から順に) 本ボリュームディスプレイの構成, 往復運動機構の外観, 往復運動機構の構造, 表示画像例 (3つの視点から)

Fig. 2 (from above to below) Schematic overview of our display, Photo and schematic of the reciprocating mechanism, and Sample 3D images on the display from three different viewpoints

ル (VFD) を表示面と垂直方向に往復運動させて体積走査を行い立体を表示する. VFD には縦 $64 \times$ 横 128 ピクセルの解像度を持つ市販の単色グラフィック表示型 (ノリタケ伊勢電子 MW12864J) を用い, 往路と復路で各 128 枚の断面を表示し体積走査を行う. 残像効果を利用する本ディスプレイにおいては, 表示する立体の断面や輪郭を, 数 kHz のリフレッシュレートで高速に更新しつつスタティック表示する素子が必要である. この表示性能を満足する自発光素子としては VFD の他に LED があるが, スタティック表示可能な小型・高解像度の LED パネルが市販品として存在しないため, 入手の容易性から VFD を選択した. この VFD により, 本ディスプレイは横 $4[\text{cm}] \times$ 縦 $2[\text{cm}] \times$ 奥行 $4[\text{cm}]$ の直方体空間内に, $128 \times 64 \times 128[\text{dot}]$ の解像度で単色の立体表示を行う. 図 3 に, 本ディスプレイの表示エリアと解像度, 座標系, 体積走査の方向を示す.

図 2 において, サーボモータ M の回転が, クランク C1 を介しリニアガイド L1 のスライド S1 に往復運動として伝達される. 往復運動は $12[\text{Hz}]$ で行うため, M の回転速度は $12[\text{rps}]$ ($720[\text{rpm}]$) 一定である. C1 の寸法は $r = 3[\text{cm}]$, $l = 20[\text{cm}]$ であり, S1 は $2r = 6[\text{cm}]$ の区間を往復運動する. VFD は図の紙面に対し表示

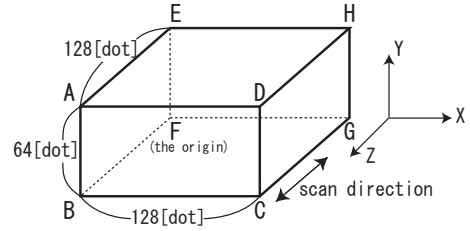


図3 本ディスプレイの表示エリア
Fig. 3 Display Area of Our Display

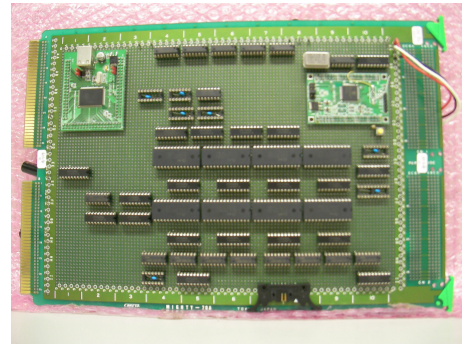


図4 画像表示ボード
Fig. 4 Display board

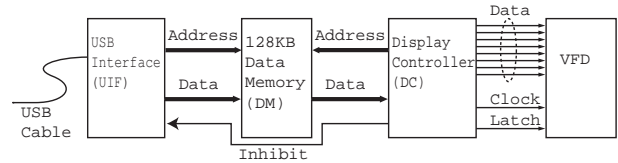


図5 画像表示ボードのブロック図
Fig. 5 Display board architecture

面が垂直となるように S1 に固定される. M の回転はまた, ベルト B を介しプーリ P に伝達され, C2 を介して S2 に伝達される. S2 の運動は S1 と逆向きであり, これによって振動を相殺する. W は VFD と同質量 (約 $60[\text{g}]$) のアルミブロックである. 体積走査は往復運動の中心 4cm 区間で行い, 区間検出はフォトセンサにより行う. 往路と復路でそれぞれ体積走査を行うため, 体積走査レートは $24[\text{Hz}]$ である.

2.2 画像表示ボード

図 2 において, 表示立体の断面データはホストコンピュータ HC 上で作成し, USBI/F 経由で画像表示ボード DB に転送する. DB はこれをメモリに蓄え, 往復運動による体積走査に同期して VFD へ表示する. 四元数 Julia 集合のパラメタ変形においては, 複雑な形状変化が絶えず行われる. このため, アニメーション表示の際には十分なコマ数で表示する必要がある. 本画像表示ボードの外観を図 4 に, 構成を図 5 に示す. 画像表示ボードは USBI/F (UIF), 表示データメモリ (DM), 表示コントローラ (DC) からなる. 往路

または復路の1回の体積走査で表示される128枚の断面データは、後述のようにHCからUIFを通じてDMに書き込まれる。書き込みメモリサイクルは、UIFに使用されているUSBコントローラ(Cypress EZ-USB FX2LP)により行う。表示するアニメーション画像全体の断面データは、HC上でファイルとして格納され、体積走査に同期し1コマずつDBに転送されるため、実質的にコマ数制限はない。

HC上での断面データは、VFDの各画素の点灯/消灯を表す2進値を、そのままバイナリ形式でファイルに格納したものである。各断面はVFDと同じ $128 \times 64[\text{dot}]$ の画素からなり、断面数は128であるので、1回の体積走査に必要なデータ量は $128 \times 64 \times 128[\text{bit}] = 128[\text{kbyte}]$ である。

ボリュームディスプレイについては、これまでに多くの方式が提案・実装されている[7] - [12]。本ディスプレイの表示エリアは縦 $2\text{cm} \times$ 横 $4\text{cm} \times$ 奥行 4cm と小さく、表示画像も単色2値であるが、レンズ等の光学系を持たず市販部品から構成でき、ピクセル間のクロストークがなく 0.3mm 角のボクセルを広い視野角(上下左右約 170°)で鮮明に表示できる。また、体積走査レートと同じ $24[\text{fps}]$ のアニメーション表示が可能である。

3. 可視化手法

3.1 漸化式

四元数 Julia 集合を求める漸化式は、(2)式において $f(\mathbf{q}_n, c) = \mathbf{q}_n^2 + c$ とした漸化式：

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n^2 + c \quad (4)$$

を用いた。四元数 Julia 集合の定義に従うと、漸化式の発散/非発散の判定には無限回の式適用が必要である。しかし一般には50回を上限とし、その間に \mathbf{q}_n のノルムが4.0未満であれば非発散と判定する方法が用いられる[1]ため、本研究においてもこの基準に従い発散/非発散の判定を行った。そのさい、3次元形状として可視化するために、虚軸である i 軸、 j 軸、 k 軸のいずれかの値を一定値に固定し、実軸および残りの虚軸からなる空間で判定を行っている。

3.2 Julia 集合の表示

前節の判定で得られる非発散点の集合は充填 Julia 集合となるため、Julia 集合として表示するにはその境界面を求める必要がある。本研究では、判定を行う空間を格子分割し、各格子点に対応した3次元配列の要素に、非発散点であれば1、それ以外は0を格納し、Marching Cubes 法[13]により閾値1の等値面となる点の集合を求めた。これらの点は、最終的に図3の表示エリアの光点にマッピングされ表示される。

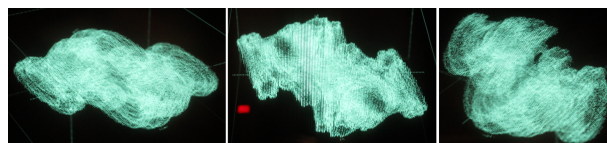


図6 ボリュームディスプレイ上での四元数 Julia 集合の静止画表示例(1)(3視点より撮影)

Fig. 6 3D still image of a quaternion Julia set on our display (1) (from three view-points)

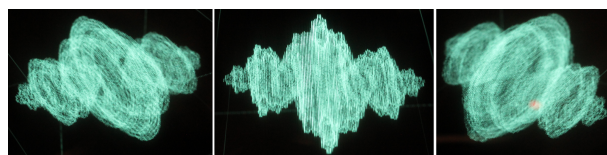


図7 ボリュームディスプレイ上での四元数 Julia 集合の静止画表示例(2)(3視点より撮影)

Fig. 7 3D still image of a quaternion Julia set on our display (2) (from three view-points)

3.3 パラメタ変形のアニメーション表示

パラメタ変形のアニメーション表示は、虚軸の固定値を変化させることによって行う。本研究では固定値の変化範囲は $-1.0 \sim +1.0$ に選び、この範囲を512ステップで均等に変化させ、512フレームのアニメーションを作成し表示した。

4. 表示結果

4.1 静止画表示

(2)式で $c = -0.450 - 0.447i + 0.181j + 0.306k$ とし、 i 軸の値を0に固定したときに得られる四元数 Julia 集合をボリュームディスプレイ上に表示した様子を図6に示す。同様に、 $c = -0.75 - 0.14i$ とし、 k 軸の値を0に固定したときに得られる四元数 Julia 集合を表示した様子を図7に示す。図6、図7は、左より順に、表示画像を左側、正面、右側から撮影したものであり、ボリュームディスプレイ上の表示画像が、視点の移動によって変化している様子がわかる。また、光点により描かれた画像であるため、内部の構造が透過的に観察できることもわかる。なお、図6中央および図7左端の画像に見られる赤色の光点は、フォトセンサの動作ランプが撮影時に写りこんだものである。

4.2 パラメタ変形のアニメーション表示

(2)式で $c = -0.450 - 0.447i + 0.181j + 0.306k$ とし、 i 軸の値を -1.0 から $+1.0$ まで512ステップで均等に変化させたときに得られる四元数 Julia 集合の変形を、ボリュームディスプレイ上に表示した様子を図8に示す。

変形のアニメーション表示の静止画撮影においては、撮影に用いるカメラのシャッター動作とディスプレイ

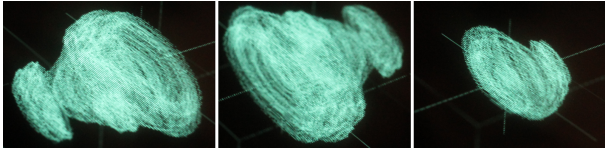


図8 ポリウムディスプレイ上での四元数 Julia 集合のパラメタ変形の表示例

Fig. 8 Frames from 3D animation of the deformation

の体積走査とのタイミングが合わず、撮影画像が欠けてしまうため、アニメーションの特定のフレームを静止画として表示し撮影を行った。図8は、左より順に、 i 軸の固定値が -0.5 , $+0.5$, $+0.7$ の場合のフレームである。撮影は表示画像の左側から行った。

5. 検討

本ディスプレイは、残像ではあるが直接空間に立体を描くため、四元数 Julia 集合の表示においても、観察者は視野角（上下左右約 170° ）の範囲から自由な視点で表示画像を観察可能であった。また、Marching Cubes 法により求めた等値面は、本ディスプレイ上では約 0.3mm 厚の光の膜として表示されるため、眩輝感もなく、集合の内部構造が透過的に観察可能であった。

一方、体積走査に伴うフリッカーと動作音、表示エリアの小ささは、観察者に一定のストレスを与えるものであった。フリッカー低減のためには体積走査レートを上げる必要があるが、振動や耐久性の面から現状では困難である。表示エリアの拡大も、今後より大きな VFD パネルが入手可能とならなければ困難であるため、VFD 以外の自発光素子の採用も含め、今後の課題である。

6. 結論

本研究では、3次元フラクタル構造を持つ四元数 Julia 集合の 3D 静止画像、およびパラメタ変化による変形アニメーションを、筆者らの開発した体積走査型ポリウムディスプレイにより実空間に表示する試みを行った。その結果、集合の変形の様子を、立体視の生理的要因を満たす形式でアニメーション表示できることが判明した。また、光点表示により、集合の内部構造が透過的に観察可能であることも判明した。その一方で、体積走査に伴うフリッカーと動作音の改善、表示エリアの拡大が今後の課題として浮かび上がった。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 15K00286 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] Bourke, P.: Quaternion Julia Fractals, <http://paulbourke.net/fractals/quatjulia/>, (2001)
- [2] www.povray.org
- [3] Blundell, B., Schwarz, A.: Volumetric Three-Dimensional Display Systems. Wiley-IEEE Press, New Jersey (2000)
- [4] 山本 欧, 蛍光表示管を用いたポリウムディスプレイと表示データ生成ツール, 芸術科学会論文誌 8, 15-24 (2009)
- [5] 山本 欧, 國分 雅敏, ポリウムディスプレイによる極小曲面の等長変形の可視化, 可視化情報学会論文集, 30, no.6, 39-45 (2010)
- [6] Yamamoto, O., Kokubu, M.: Visualization of Tangent Developables on a Volumetric Display, MathUI Workshop at Conference on Intelligent Computer Mathematics (CICM) (2014)
- [7] Suyama, S., Date, M., Takata, H.: Three-Dimensional Display System with Dual-Frequency Liquid-Crystal Varifocal Lens. Jpn. J. Appl. Phys. 39, 195-197 (2000)
- [8] Favalora, G., Napoli, J., Hall, D., Dorval, R., Giovinco, M., Richmond, M., Chun, W.: 100 Million-voxel volumetric display. In: Proc. SPIE 4712, pp.300-312 (2002)
- [9] Sullivan, A.: DepthCube solid state 3D volumetric display. In: Proc. SPIE 5291, pp.279-284 (2004)
- [10] Downing, E., Hesselink, L., Ralston, J., Macfarlane, R.: A Three-Color, Solid-State, Three-Dimensional Display. Science, 273, no. 5279, pp.1185-1189 (1996)
- [11] Refai, H.H.: Static Volumetric Three-Dimensional Display. J. Display Technol. 5, no. 10, pp.391-397 (2009)
- [12] Saito, H., Kimura, H., Shimada, S., Naemura, T., Kayahara, J., Jarusirisawad, S., Nozick, V., Ishikawa, H., Murakami, T., Aoki, J., Asano, A., Kimura, T., Kakehata, M., Sasaki, F., Yashiro, H., Mori, M., Torizuka, K., Ino, K., Laser-plasma scanning 3D display for putting digital contents in free space. In: Proc. SPIE 6803 Stereoscopic Displays and Applications XIX, 680309 (2008)
- [13] Lorensen, E. W., Cline, E. H.: Marching Cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm. In: Computer Graphics, Vol. 21, Nr. 4, July (1987)